Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman

Etienne Ghys

Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman

le théorème d'uniformisation a cent ans !

Le 17 novembre 2007, par **Étienne Ghys**

Directeur de recherche CNRS, École Normale Supérieure de Lyon (**page web**)

Il y a exactement cent ans, Henri Poincaré publiait la preuve du théorème d'uniformisation. Il concluait ainsi une longue série de travaux, s'étalant sur tout le dix-neuvième siècle, et remontant au moins à Gauss.

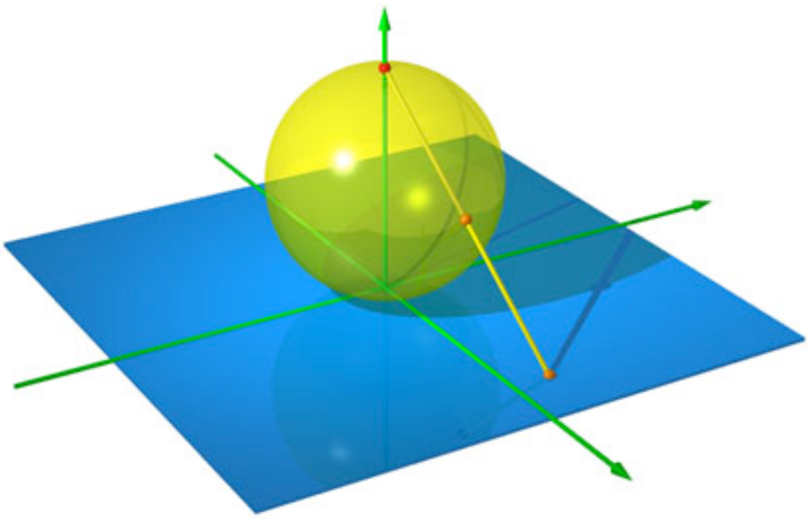
Il y a quatre ans, Grigori Perelman publiait sur internet trois articles majeurs qui mènent à la preuve de la conjecture de géométrisation de Thurston, elle-même directement issue du théorème d'uniformisation. Cela lui a valu la médaille Fields en 2006.

Je voudrais esquisser l'histoire de cette aventure en tentant d'éviter tout aspect technique. Evidemment, je serai obligé de simplifier à l'extrême et de passer sous silence un grand nombre d'aspects importants.

Hipparque et Ptolémée

COMMENÇONS au deuxième siècle... *avant* Jésus-Christ. *Hipparque*, et son successeur *Ptolémée*, trois siècles plus tard, sont semble-t-il, parmi les premiers à s'être posé la question de la "représentation" la plus précise possible du ciel étoilé ou de la surface de la terre sur un plan. Voici (une copie d'une copie de) la carte du monde par *Ptolémée*.

C’est le début de la cartographie scientifique. Parmi les méthodes introduites à cette époque, il faut mentionner la *projection stéréographique*. Ci-dessous, vous voyez une sphère jaune : la terre ; le pôle nord, en rouge ; et le plan tangent au pôle sud, en bleu. Tout point sur la terre, à l’exception du pôle nord, peut être joint au pôle nord par une droite qui coupe le plan bleu en un autre point qu’on appelle sa projection. Ceci permet de représenter toute la sphère, à l’exception du pôle nord, sur la surface d’un plan : c’est la *projection stéréographique*.



Evidemment, cette projection ne respecte *pas* les distances, c’est-à-dire la géométrie, la métrique. Vous voyez ici que l’Amérique du Sud paraît bien plus petite que l’Amérique du Nord par exemple.

Par contre, si on se concentre sur de petites zones, la *forme* est respectée : on dit aujourd’hui que la projection est *conforme*. Précisément, cela signifie qu’une zone infiniment petite de la sphère peut être dilatée ou comprimée mais elle l’est de la même manière dans toutes les directions ; la projection se comporte comme une similitude au niveau infinitésimal. Un cercle par exemple est projeté sur un cercle et non pas sur une ellipse allongée.

Gauss

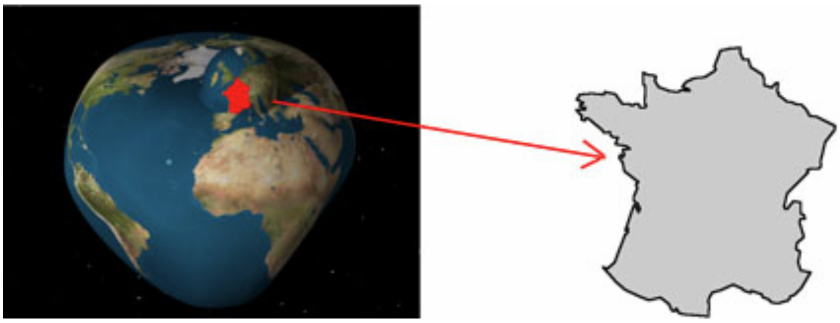
Sautons maintenant une vingtaine de siècles ! Il aurait fallu parler de l'évolution de la cartographie, indissociable de l'évolution de la géométrie. Faut-il rappeler que, étymologiquement, la géo-graphie se propose de dessiner la terre et la géo-métrie se propose de la mesurer ?

Venons-en donc à *Gauss*... En 1818, il se voit confier la mission de cartographier le royaume de Hanovre. C'est l'occasion pour lui de réfléchir aux erreurs de mesure en physique et de découvrir la fameuse courbe en cloche (vous la voyez en haut, au dessus du nombre 10, sur cet ancien billet de banque allemand), d'inventer la méthode des moindres carrés, de perfectionner la méthode des triangulations (en bas à droite, la triangulation du royaume de Hanovre), d'inventer de nouveaux instruments de mesures topographiques (en bas, vous voyez l'héliotrope), mais aussi de méditer sur la géométrie, sur l'espace, de deviner l'existence des géométries non euclidiennes, d'utiliser pour la première fois les nombres complexes dans un contexte géométrique. Et tout cela, alors qu'il chevauche la campagne, recrute des ouvriers, cherche de l'argent. Un travail incroyable.

Je ne citerai qu'un théorème de *Gauss*, qu'on appelle aujourd'hui le *théorème de représentation conforme local*.

Supposons maintenant une terre dont la forme n'est *pas* sphérique mais a priori quelconque.

Faut-il rappeler qu'au début du dix-neuvième siècle, on sait bien que la terre n'est pas exactement sphérique ? Et sur cette surface de forme patatoïdale, considérons un tout petit pays, la France, par exemple.

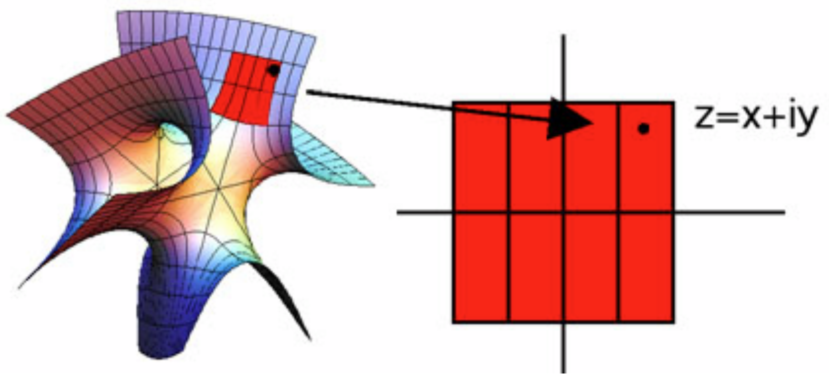


Gauss démontre qu'*il est toujours possible de représenter ce pays dans un plan de manière conforme*. Pour une terre sphérique, la projection stéréographique fait l'affaire mais pour une terre quelconque, c'est un tour de force !

Ce théorème de représentation conforme local reste aujourd'hui un théorème difficile.

L'une des grandes idées dans la preuve est d'utiliser les *nombres complexes* géométriquement pour décrire un point du plan. C'est une évidence aujourd'hui (en principe pour tous les bacheliers scientifiques) : on peut repérer un point du plan, de coordonnées (x, y) par un seul nombre complexe, $z = x + iy$. Mais au début du dix-neuvième siècle, les nombres complexes étaient encore mystérieux, imaginaires comme on dit encore parfois aujourd'hui, quasi mystiques, en tous les cas bien éloignés du réel.

S'il fallait résumer ce théorème local de *Gauss*, on peut dire qu''*il permet de repérer localement un point sur une surface quelconque par un nombre complexe*.

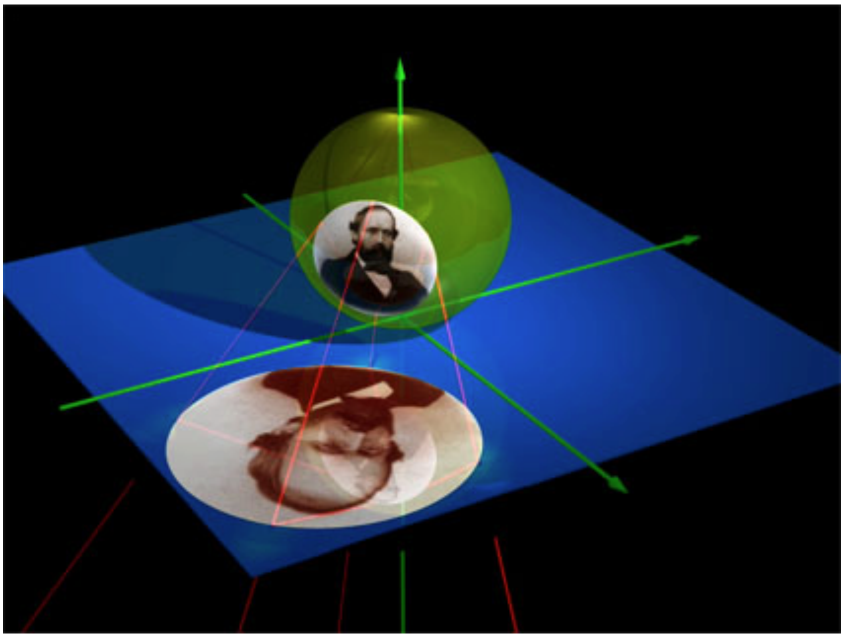


Ainsi, la surface qui est de dimension *deux*, peut être décrite par *un seul* nombre, certes *complexe*, mais un seul nombre quand même !

La dimension *deux* réelle a été ramenée à la dimension *un* complexe. Les surfaces deviennent de dimension un et ce sont donc des *courbes complexes*. En effet, les courbes sont précisément les objets qui sont localement paramétrés par un seul nombre.

Riemann

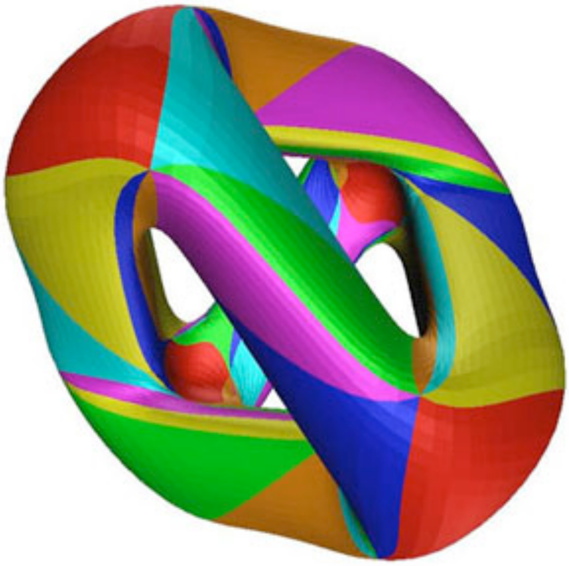
Ne vous affolez pas lorsque vous verrez un géomètre face à une sphère et qui vous parle d'une droite ! Il faut le pardonner. Sa droite est une droite complexe, de dimension un complexe, donc de dimension deux réelle. Elle est d'autre part projective ce qui signifie qu'on a ajouté au plan complexe un point dit *à l'infini*, qui n'est autre que le pôle nord. Ce point de vue sur la sphère est traditionnellement attribué au héros suivant de notre histoire : le grand Bernhard *Riemann*. On parle souvent en effet de la sphère de *Riemann*.



Un mot sur *Riemann*, lui qui en mériterait des millions. L'une de ses contributions, qui a véritablement révolutionné la géométrie algébrique, a été en quelque sorte de faire fonctionner la machine à l'envers : de considérer les *courbes comme des surfaces*.

Une *courbe algébrique*, c'est une courbe du plan qui est définie par une équation polynomiale. Vous voyez ici la courbe d'équation $x^3y + y^3 + x = 0$. Pas très intéressant n'est-ce pas ?

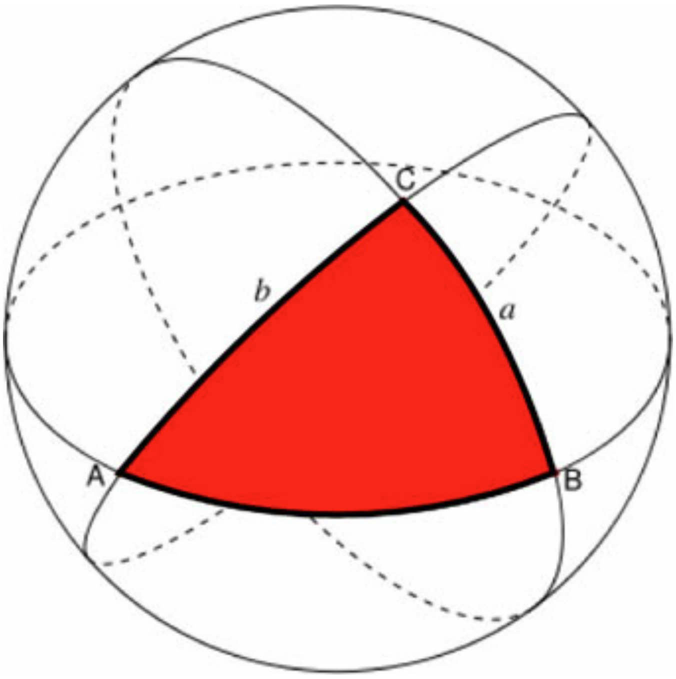
Mais si on fait comme *Riemann*, et si on pense à x et y comme des nombres complexes, chacun avec sa partie réelle et imaginaire, le plan x, y devient de dimension quatre et la courbe devient de dimension deux, c'est-à-dire une surface. La voilà.



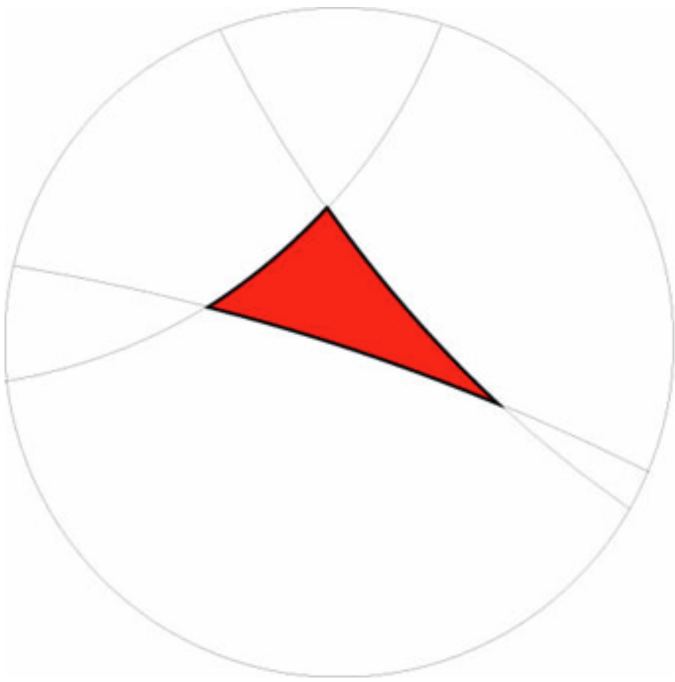
Cette surface est beaucoup plus intéressante, elle a en particulier une topologie très riche. Toute une structure apparaît : dans ce cas par exemple, elle possède 168 symétries (là, il faut que vous me croyiez sur paroles). Les *courbes algébriques*, ou plus précisément les *surfaces de Riemann*, sont parmi les plus beaux objets mathématiques. Quel plaisir de pouvoir les considérer *à la fois* comme des courbes et comme des surfaces !

Gauss ... encore !

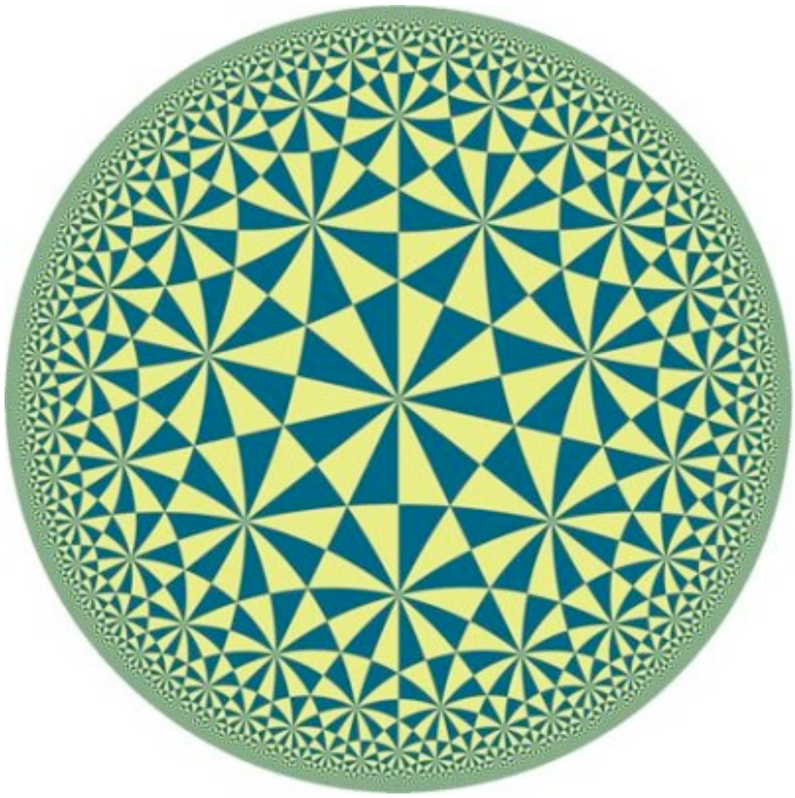
Il est temps d'énoncer le théorème d'uniformisation de *Poincaré* — de *Poincaré-Koebe* — pour être un peu plus proche de la réalité historique. Mais il faut d'abord revenir au grand *Gauss*. Dans ses méditations sur la géométrie de la sphère, *Gauss* savait bien entendu que dans un triangle sphérique la somme des trois angles ne vaut pas 180 degrés, comme dans le cas d'un triangle du plan usuel, mais que cette somme surpasse 180 degrés d'une quantité qui n'est rien d'autre que l'aire du triangle.



Par une intuition géniale, *Gauss* devine l'existence d'une surface, en quelque sorte duale de la sphère, dans laquelle la somme des angles d'un triangle est cette fois *inférieure* à 180 degrés, et pour laquelle l'écart à 180 degrés est égal à l'aire du triangle.



C'est le plan qu'on appelle aujourd'hui *non-euclidien*, ou *hyperbolique*, qui a d'abord été imaginé comme un être mathématique abstrait, puis qui a pris une existence concrète grâce à *Riemann* et *Klein*. L'histoire, souvent injuste, appelle cette espace *le plan de Poincaré*. Ainsi donc, à la fin du dix-neuvième siècle, on dispose de trois modèles géométriques : *le plan d'Euclide* bien sûr, mais aussi la *géométrie sphérique*, et la *géométrie hyperbolique*. Voici une manière de paver ce plan un peu bizarre.



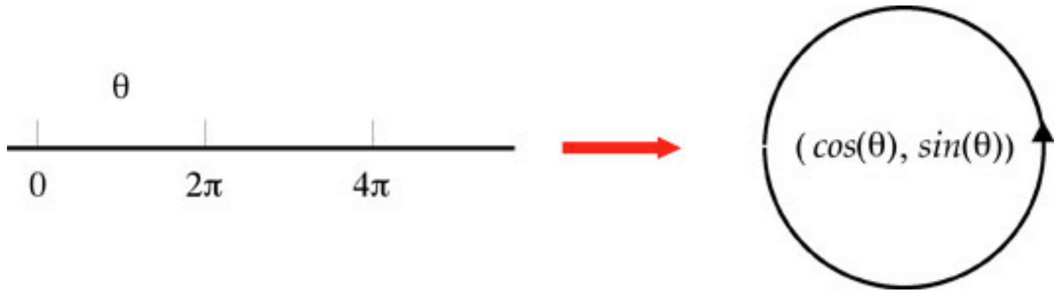
Poincaré

C'est *Poincaré* qui a montré que ces trois géométries sont omniprésentes et qu'elles permettent de comprendre toutes les surfaces. Voici enfin un énoncé très simplifié du théorème d'uniformisation de *Poincaré*.

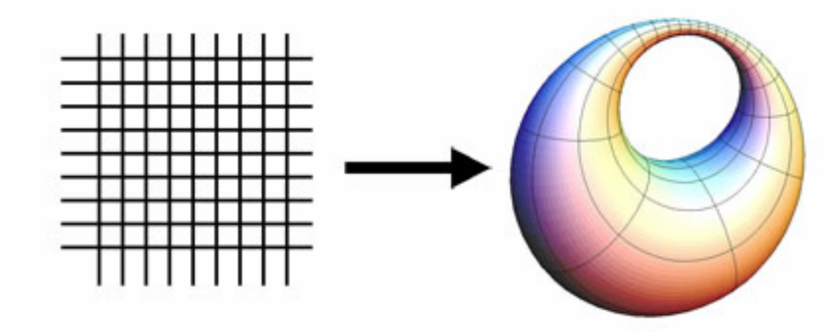
Théorème : *Toute surface peut être uniformisée par l'une des trois géométries : euclidienne, sphérique, ou hyperbolique*.

Bien sûr, il faut expliquer ce que signifie uniformiser.

Un exemple d'abord : on peut dire que lorsqu'on paramètre un cercle avec *sinus et cosinus*, c'est-à-dire en embobinant une droite autour d'un cercle, on a *uniformisé* le cercle par la droite.

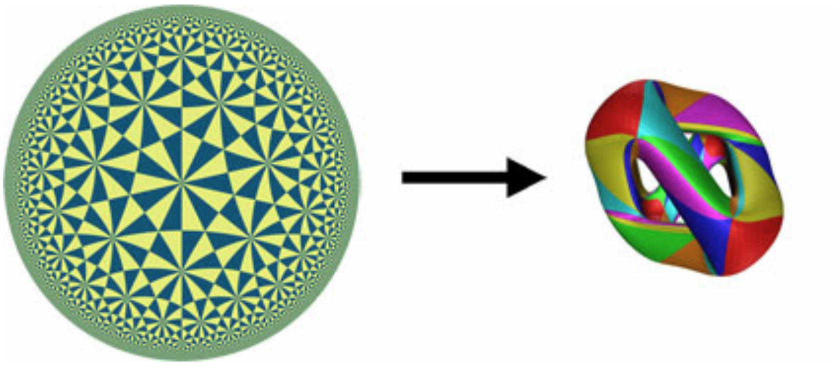


De la même manière, voici une surface qui a la topologie d'un tore et qui est uniformisée par un plan euclidien.

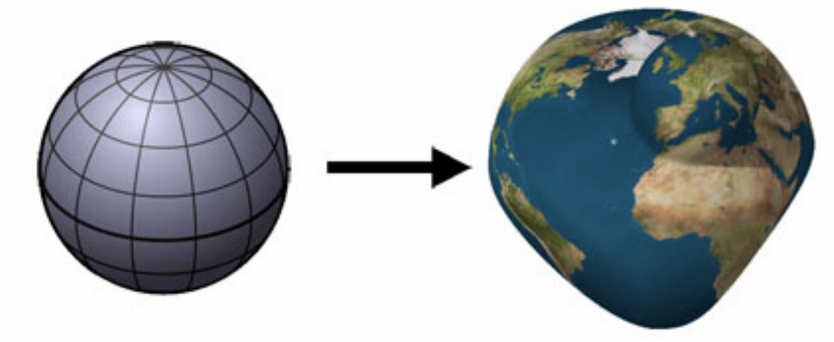


En général, *uniformiser une surface* munie d'une métrique, c'est trouver une projection, un revêtement en termes techniques, qui part soit de la sphère, soit du plan euclidien, soit du plan hyperbolique, qui va vers la surface donnée, et qui est localement conforme, tout comme la projection stéréographique est conforme : les formes infinitésimales sont respectées.

Et voici un exemple d'une surface plus compliquée, la courbe algébrique que nous avons vue précédemment, qui est uniformisée par un plan hyperbolique.



Ici, vous voyez une surface qui a la topologie d'une sphère, mais qui n'en a pas la géométrie, qui est uniformisée par une sphère parfaite. En particulier, le théorème d'uniformisation va plus loin que le théorème local de *Gauss*. Toute "terre de forme patatoïdale" peut être cartographiée *globalement* par une sphère parfaite.

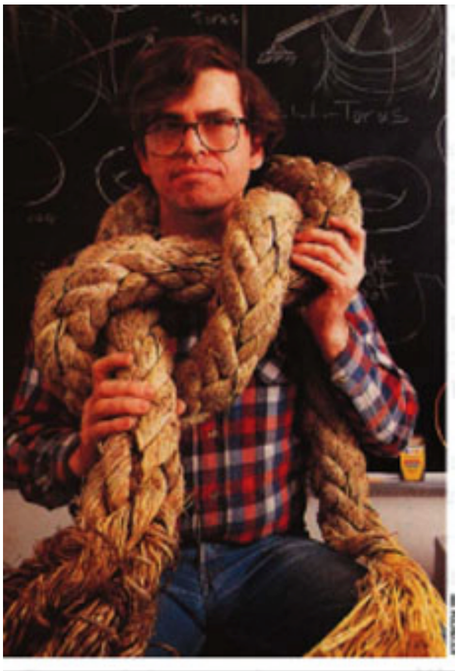


Si cet énoncé ne vous parle pas, retenez simplement que le théorème d'uniformisation de Poincaré permet de comprendre la géométrie de *toutes* les surfaces à l'aide de trois modèles seulement : sphérique, euclidien et hyperbolique. Si vous préférez, grâce à ce théorème, toutes les surfaces ont été "géométrisées".

De même que tout le dix-neuvième siècle a été nécessaire pour comprendre les surfaces, c'est-à-dire les objets de dimension deux, il a fallu tout le vingtième siècle pour comprendre les objets de dimension trois : c'est ce sommet que Grigori *Perelman* vient d'atteindre. Là encore, je vais devoir tronquer, déformer, et simplifier à l'extrême.

Thurston

Dans les années 1970-1980, c'est W. *Thurston* qui prend conscience que beaucoup d'espaces de dimension trois peuvent être géométrisés, tout comme les surfaces.



De même que la géométrie euclidienne plane a deux *soeurs* : la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, la géométrie euclidienne en dimension 3, la vénérable géométrie dans l'espace, comme on disait jadis, a également des soeurs, mais la famille est plus nombreuse. Il y a la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, analogues aux géométries sphériques et hyperboliques en dimension 2, mais il y a aussi cinq autres soeurs bien moins connues, qu'on appelle les géométries de *Thurston*, et qui portent des noms peu attirants, comme **Nil**, **SL2**, **Sol** ou encore $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$. *Thurston* commence par étudier un grand nombre d'exemples d'espaces de dimension trois et il constate que tous ces exemples peuvent être décrits par ces huit géométries. Il compile des atlas, encourage ses étudiants à établir des banques de données informatiques. Son approche est très concrète, presque "expérimentale", en utilisant un mot qui n'est pas souvent utilisé en mathématiques.

En 1976, il formule sa conjecture de géométrisation :

Tout espace (***) de dimension 3 peut-être muni d'une métrique qui est localement isométrique à l'une des huit géométries de Thurston.

Il faudrait être plus précis. Les étoiles signifient "variétés compactes, asphériques et atoroïdales", mais il faut simplifier :-(Il faut simplement retenir que cette conjecture exprime que les espaces de dimension trois peuvent être “géométrisés”. La topologie des espaces, s’en trouve ainsi réduite à la géométrie.

Mais *Thurston* ne s’en tient pas à conjecturer. Il démontre sa conjecture dans de nombreux cas significatifs, et cela lui vaut la médaille Fields en 1983. Thurston est avant tout un géomètre/topologue ; ses méthodes sont celles du topologue : il aime ce qu’on appelle la *chirurgie* : couper les espaces en morceaux et le recoller. Tout semblait indiquer que la preuve de la conjecture allait utiliser ces méthodes topologiques ; couper, coller.

Perelman

2003 : Coup de tonnerre dans le monde de la topologie. Grigori *Perelman*, comme un hérétique, est un analyste, un spécialiste des *équations aux dérivées partielles*, sujet que beaucoup de topologues avaient l’habitude de regarder de loin. Avaient ! car depuis Perelman ils ont changé d’avis :-)

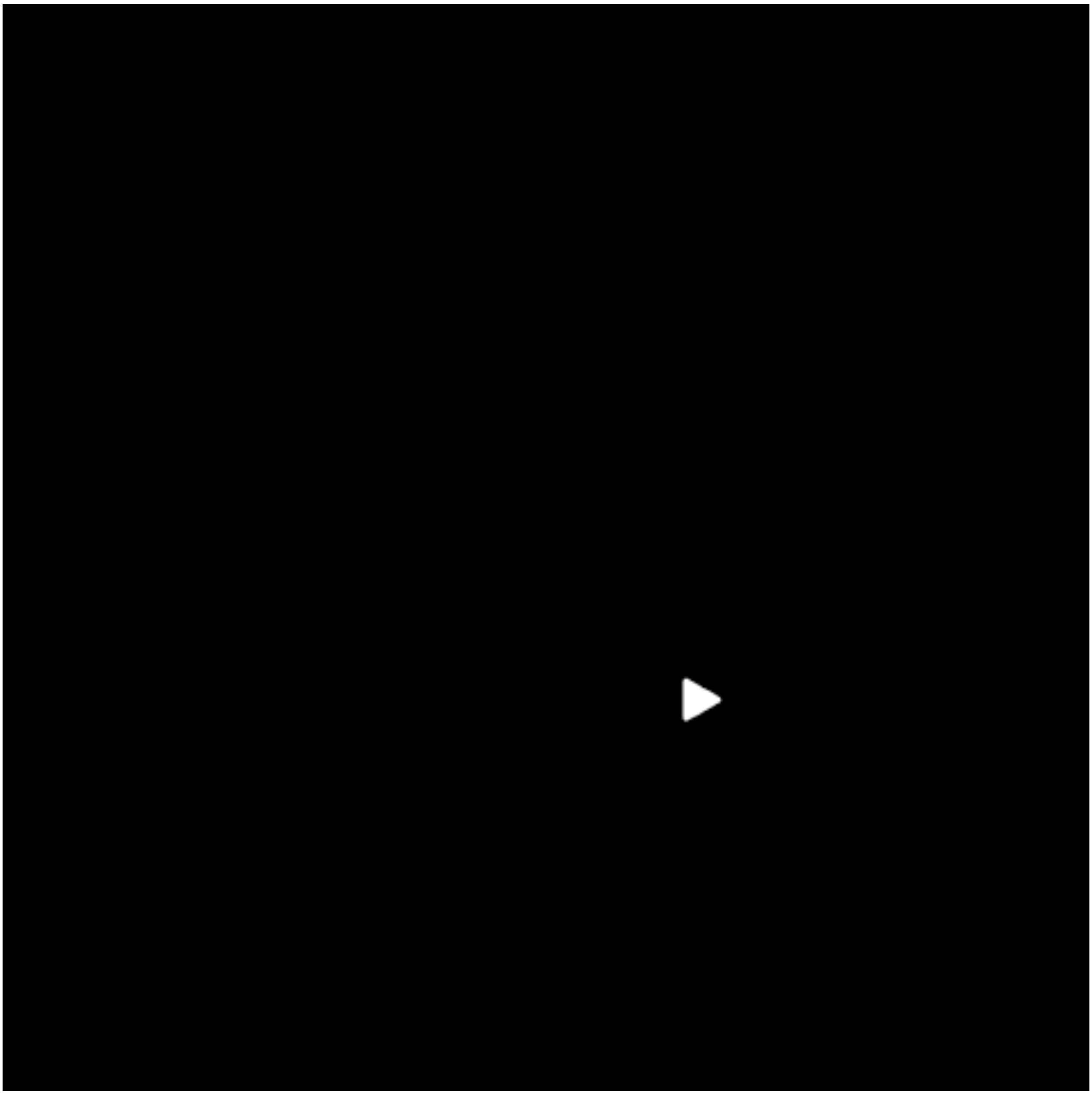
Que fait *Perelman* ? Difficile à expliquer en quelques mots. Il faudra se contenter de quelques phrases extrêmement vagues, et d’un exemple simple qui illustre la méthode qu’il a suivie.

Prenez un espace de dimension trois, et choisissez une métrique sur cette espace. Bien sûr cette métrique n’a aucune raison d’être l’une des huit de *Thurston*. Ce qui l’empêche d’être une telle métrique, *grosso modo*, c’est qu’elle n’est pas nécessairement homogène ; elle peut être plus courbée en certains endroits que d’autres par exemple. Alors, encore une fois *grosso modo*, on fait “chauffer” l’espace et on laisse diffuser la métrique, jusqu’à ce qu’elle atteigne une espèce de position d’équilibre thermique qui, on l’espère, sera homogène : ce sera une des huit métriques de *Thurston*. Cette explication est vague, trop vague, et n’indique pas les difficultés techniques considérables de la preuve de Perelman. L’équation d’évolution aux dérivées partielles qu’il utilise s’appelle le *flot de Ricci* ; analogue non linéaire de la fameuse équation de la chaleur.

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = Ricci(g_t)$$

Voici un théorème récent, dû à *Gage, Grayson et Hamilton*, bien plus simple que le théorème de *Perelman*, et qui peut illustrer la méthode. Voici une courbe dans le plan. Comment peut-on l'arrondir ? Une idée très simple est de la pousser dans le sens de sa courbure. Vous poussez tous les points dans le sens de la convexité, peu si c'est peu courbé et beaucoup si c'est beaucoup courbé.

Et vous faites tout cela en continu, au fur et à mesure que la courbe se déforme. Regardez le résultat si je pars d'une courbe sinueuse. La courbe devient ronde, sa courbure s'équilibre, et tend à devenir un cercle.



Le flot de Ricci (en dimension 1)

C'est le théorème de *Gage-Grayson-Hamilton*, qui n'est pas facile du tout. Ni même intuitif. Pourquoi par exemple la courbe ne développerait-elle pas des points doubles ?

Le théorème de *Perelman* est dans le même esprit ; vous prenez une métrique sur un espace de dimension 3, et vous poussez dans le sens de la courbure. Et ça converge vers une métrique de Thurston. L'essentiel de la difficulté du théorème consiste en une analyse précise de l'apparition de singularités.

Une dernière remarque et une conclusion

La remarque, c'est que la conjecture de *Thurston* entraîne la fameuse conjecture de *Poincaré*, qui date de 1905, et qui est donc aujourd'hui un théorème. Encore un exemple qui montre que pour résoudre un problème, il est parfois utile d'en résoudre un plus difficile encore.

La conclusion, c'est que les mathématiques sont vivantes et saines. Cette histoire illustre une fois de plus cette unité des mathématiques qui n'a pas fini de surprendre les mathématiciens.

Pour en savoir :

plus :

La conjecture de Poincaré : Comment Grigori Perelman a résolu l'une des plus grandes énigmes mathématiques, par de George Szpiro.

encore plus :

un **article dans Images des Mathématiques 2006**,

encore encore plus :

un **exposé** au séminaire Bourbaki, par G. Besson,

beaucoup, beaucoup plus :

groupe de travail sur les travaux de Perelman (Grenoble),

et bien sûr !

les **articles de Perelman**.

P.S. :

*Merci à **Jos Leys** à qui je dois quelques unes des (plus belles) figures.*

Crédits images

img_31 — *Disque* : ***Jos Leys***.

Pour citer cet article : **Étienne Ghys**, **Géométriser l'espace : de Gauss à Perelman**. *Images des Mathématiques*, CNRS, 2007. En ligne, URL : **http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html**